L'objectif de ce TP est d'étudier comment calculer une valeur approchée d'une racine d'une fonction f donnée. Les trois méthodes présentées (dichotomie, suites récurrentes, Newton) sont explicitement au programme.

1 La méthode de dichotomie

Cette méthode repose sur le Théorème de Cauchy que vous avez vu en cours, et surtout sur sa démonstration. C'est une méthode robuste (peu d'hypothèses) mais un peu lente.

Théorème 1 *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f est continue sur le segment $[a,b]$ et $f(a)\cdot f(b) < 0$.*
Alors f possède une racine dans $]a,b[$.

Nous rappelons l'idée de la preuve. Soit α la solution cherchée. On définit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) par : $a_0 = a; b_0 = b$ et on pose $c = \frac{a_n+b_n}{2}$.

- si $f(c) = 0$, alors $\alpha = c$.
- si $f(c) \times f(a_n) > 0$ alors $\alpha \in]c, b_n[$ et on pose $a_{n+1} = c, b_{n+1} = b_n$.
- si $f(c) \times f(a_n) < 0$ alors $\alpha \in]a_n, c[$ et on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c$.

Si les deux suites sont infinies (donc on n'a pas trouvé α), alors pour tout n, la solution α vérifie $\alpha \in]a_n, b_n[$ et $|b_n - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$. On peut montrer alors que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers la limite α.

Remarquons que la démonstration du Théorème de Cauchy permet de montrer qu'à chaque étape de l'algorithme, l'erreur $\varepsilon = |a_n - \alpha|$ est majorée par $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2^n}$. On a aussi un critère d'arrêt de l'algorithme : on arrête quand $|a_n - b_n|$ est inférieure à la précision souhaitée.

```
# Algorithme : f, a, b, ε
#       Variables locales : an, bn, c
#       a_n := a
#       b_n := b
#
#       Tant que |b_n − a_n| > ε, faire
#             c := (b_n + a_n)/2
#             si f(c) = 0 alors
#                   Renvoyer c
#                   Fin
#             sinon si f(a_n).f(c) < 0 alors
#                   b_n := c
#             sinon a_n := c
#             fin si
#       fin Tant que
#
#       Renvoyer c
#       Fin
```

Cet algorithme suppose que les entrées vérifient les hypothèses du théorème. Il nous renvoie non pas la solution de $f(x) = 0$, mais une valeur *approchée*. Il serait donc judicieux de renvoyer également les valeurs de a_n et b_n afin d'obtenir un intervalle *exact* sur lequel f s'annule. Il peut aussi être judicieux de donner un nombre maximal d'itérations pour la boucle `Tant que`. Sous Maple, pour assurer un bon fonctionnement de l'algorithme, il vaut mieux prendre $\varepsilon > 10^{-Digits}$.

Exercice 1 *Définissez sous Maple une procédure* `dichotomie`*. Calculez des valeurs approchées (à 10^{-5}) des racines pour les fonctions $f : x \to x^2 - 1$ sur $[0,2]$, et $g : x \to x - \cos(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comparez aux valeurs données par Maple.*

Pour mieux étudier la vitesse de convergence de la méthode de dichotomie, modifiez légèrement la procédure `dichotomie` de sorte qu'elle prenne en entrée un entier n et qu'elle s'arrête après n itérations. Nommons-la `dichotomie2`.

Exercice 2 *Considérons la fonction $f\colon x \to x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1,2]$. On appelle x_n le nombre obtenu après n itérations et $err(n) = |x_n - \sqrt{2}|$. Calculez x_n et $err(n)$ pour les valeurs suivantes de n : 5, 10, 15 et 20 (commencez par mettre Digits à 50.) On voit que la méthode de dichotomie est fiable mais un peu lente.*

Remarquons au passage que l'on vient de définir une méthode pour calculer la valeur approchée d'une racine carrée quelconque $\sqrt{a}$. Il suffit de chercher une solution positive approchée de $f\colon x \to x^2 - a$, par la méthode de dichotomie ou par une autre.

2 Méthode des approximations successives

Cette méthode est aussi appelée méthode des suites récurrentes, ou méthode des itérations.

On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on pose $g\colon x \to x - f(x)$ sur $[a,b]$. Si α est une racine de f, c'est un point fixe de g, c'est à dire que $g(\alpha) = \alpha$.

On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in [a,b], |g'(x)| \leq k$. On choisit $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) \in [a,b]$. Alors en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on peut montrer que la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ reste dans $[a,b]$ et converge vers α. L'erreur à chaque pas est majorée par $\varepsilon \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$. On peut ainsi prévoir à l'avance le nombre de pas de calculs pour obtenir une précision de ε.

Démontration : on montre ici qu'à chaque pas l'erreur est majorée par $\varepsilon \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$ (attention, pour une démonstration complète, il faut aussi montrer que les x_n restent dans $[a,b]$).

On montre déjà que pour tout n, $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$ (EG1). On procède par récurrence. *Cas de base pour $n = 0$:* évident car $|x_0 - \alpha| \leq k^0|x_0 - \alpha|$. *Récurrence $n \to n+1$:* on suppose que $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$. Or en utilisant l'inégalité des accroissements finis aux points x_n et α, on obtient : $|g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|$. Comme α est point fixe de g et que $g(x_n) = x_{n+1}$, l'inégalité devient $|x_{n+1}) - \alpha| \leq k|x_n - \alpha|$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient finalement ce qu'on cherchait : $|x_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1}|x_0 - \alpha|$. On vient de montrer que pour tout n, $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$.

Maintenant on montre que $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{1-k}|x_1 - x_0|$ (EG2). On peut écrire $x_0 - \alpha = x_0 - x_1 + x_1 - \alpha$. Avec l'inégalité triangulaire puis (EG1) on a $|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \alpha| \leq |x_0 - x_1| + k|x_0 - \alpha|$. On arrive donc à l'inégalité voulue en utilisant le membre de gauche et le membre de droite de la précédente inégalité. On vient de montrer (EG2).

En utilisant (EG1) et (EG2) on conclut.

Exercice 3 *Écrire une procédure* `iteration` *utilisant cette méthode. L'utiliser pour trouver des solutions à 10^{-10} près de l'équation $f(x) = 0$ pour :*

- *$f : x \to x - \cos(x)$, et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,*
- *$f : x \to x - \tan(x)$, et $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,*

3 L'algorithme de Newton

Cette méthode est aussi appelée méthode de la tangente.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que f' ne s'annule pas sur $[a,b]$. L'idée repose sur l'approximation d'une courbe par sa tangente. On rappelle l'approximation suivante qui découle directement de la définition de la dérivée : si f est dérivable en x, pour y au voisinage de x, on a : $f(y) = f(x) + (y-x)\cdot f'(x) + o(y-x) \quad (E1)$.

Donc si y est une racine de f, et que x_0 désigne une approximation de y, on espère que x_1, solution de $0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0)$ sera une meilleure approximation de y. Graphiquement, x_1 est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe $\{y = f(x)\}$ au point d'abscisse x_0.

On itère ensuite le procédé. En utilisant $(E1)$ avec $y = x_{n+1}, x = x_n$ et en supposant que x_{n+1} est racine de f, on obtient la récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Quand la suite (x_n) converge, elle converge (vite) vers α.

Exercice 4

1. *Comprenez bien la récurrence qui lie les* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Écrivez sous Maple une procédure* `newton` *qui, étant donnés une fonction* f*, une valeur initiale* x_0 *et un entier* n*, calcule la valeur de* x_n.
3. *En prenant* $f\colon x \to x^2 - 2, x_0 = 1$ *ou* 2 *et* err *définie comme avant, calculez* x_n *et* $err(n)$ *pour les valeurs suivantes de* n *:* 1,2,3,4,5 *et* 10 *(toujours avec Digits valant* 50*). Que constate-t-on par rapport à la méthode de dichotomie ? En fait la méthode de Newton est quadratique (en général, après* n *pas de calculs, on a trouvé* n^2 *décimales exactes) quand la méthode de dichotomie est linéaire.*

4 Questions subsidiaires : défauts de la méthode de Newton

Exercice 5 (Divers problèmes)

1. *Appliquez la procédure* `newton` *à la fonction logarithme népérien et la valeur initiale* $e+1$*. Que se passe-t-il pour* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *?*
2. *Appliquez la procédure* `newton` *à la fonction* $x \to x^2 - 2$ *et la valeur* $x_0 = 0$*. Que se passe-t-il cette fois-ci ?*

Les différents problèmes rencontrés proviennent du fait que nous ne nous sommes pas assurés de considérer un intervalle stable par f (cas 1) ni que l'on ait bien f' non nulle sur cet intervalle (cas 2).

Exercice 6 (Convergence lente) *Considérons la fonction* $g\colon x \to x^4 - 4$ *et la valeur initiale* $x_0 = 100$*. Appliquez la procédure* `newton` *à ces entrées pour* $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ *Que constatez-vous ?*

En fait, la relation de récurrence qui lie les valeurs de x est de la forme $|x_{n+1} - y| \leq K|x_n - y|^2$ où K est une constante dépendant de f et de l'intervalle d'étude et y est la racine de f sur cet intervalle (s'il y'en a qu'une). Ainsi, si l'on est très proche de la racine, la convergence est très rapide mais sinon, elle est plutôt lente...

Pour régler ces problèmes, on peut commencer par "s'approcher" de la racine à l'aide de la méthode de dichotomie et ensuite seulement appliquer la méthode de Newton.

Exercice 7 *Écrivez une procédure qui, étant donnés* f*,* ε*,* a*,* b *et* n*, trouve une solution à* ε *près par dichotomie dans* $[a,b]$ *puis applique* n *itérations de la méthode de Newton.*