Ce TP se concentre sur l'intégration. On fera déjà le tour des fonctions Maple pour le calcul de primitives et d'intégrales, puis on verra des méthodes de calcul approché d'intégrales. La méthode de Simpson est au programme.

1 Maple pour l'intégration

Dans un premier temps nous utiliserons Maple comme un logiciel de calcul formel, grâce à la commande `int`.

Exercice 1

1. *Tapez la ligne suivante*

   `[> int(ln(x)/x,x);`

   Que fait cette commande ? Comparez avec la commande `Int`.
2. *La commande* `int` *peut aussi servir à calculer des intégrales. Lisez l'aide en ligne à ce sujet, puis calculez les intégrales suivantes :*

$$\int_0^4 2t dt, \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Exercice 2 *Définissez la fonction* $f : x \mapsto \int_0^{2x^2-3} \frac{1}{t+\sqrt{t^2+5}} dt$ *puis représenterez la graphiquement* f.

Exercice 3 *Maple sait aussi faire des changements de variables. Pour cela il faut utiliser la fonction* `changevar` *du package* `student`. *Tapez donc :*

```
[> with(student);
[> J:=Int(ln(x),x);
[> value(changevar(u=ln(x),J,u));
[> subs(u=ln(x),'');
[> simplify('');
```

Que représente `J` *? pourquoi utilise-t-on* `Int` *et pas* `int` *? Vous souvenez-vous ce que signifie* `''` *? Remarquez comment* `subs` *permet de revenir aux variables d'origine. La commande* `simplify` *est bien utile quand Maple ne veut pas simplifier l'expression au maximum.*

2 Calcul approché d'intégrales

Dans cette section, il s'agit de fournir des méthodes de calculs pour donner des valeurs approchées d'intégrales *sur un intervalle fermé* $[a, b]$. La méthode de Simpson est explicitement au programme, et il est fortement conseillé de connaître les méthodes des rectangles et des trapèzes.

2.1 Méthode des rectangle (Riemann)

Vous souvenez-vous du théorème de convergence des sommes de Riemann ? Cette première méthode est justement basée dessus. L'idée est que pour intégrer f sur $[a, b]$, on va (1) d'abord diviser $[a, b]$ en sous-intervalles définis par les n points $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ (remarque : a_0 et $a_n = b$), (2) puis considérer f constante sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et valant $f(\alpha_k)$ avec $\alpha_k \in [a_k, a_{k+1}]$. Ainsi l'intégrale de f sur $[a_k, a_{k+1}]$ est approchée par l'aire du rectangle dont les sommets sont $(a_k, 0), (a_{k+1}, 0), (a_k, f(\alpha_k)), (a_{k+1}, f(\alpha_k))$, et l'intégrale sur $[a, b]$ est approchée en sommant les aires obtenues sur chaque sous-intervalle.

La formule générale est donc :

$$I(f, a, b, n) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \times f(\alpha_k) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k)$$

On a trois choix pour α_k : le points a_k (on note la valeur obtenue I_-), le point a_{k+1} (on obtient I_+) ou le point $\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ (la valeur est notée I_m). Dans le dernier cas on parle de la *méthode du point du milieu*, et le calcul est plus précis.

Exercice 4 *Le package* `student` *contient des commandes pour afficher une fonction et les rectangles de la méthode de Riemann. Ces fonctions sont* `leftbox`,`rightbox` *et* `middlebox`. *Tapez*

```
[> leftbox(sin(x),x=0..2*Pi,20);
[> rightbox(sin(x),x=0..2*Pi,20);
[> middlebox(sin(x),x=0..2*Pi,20);
```

À quoi sert le `20` *dans les commandes ? Quelle commande correspond respectivement à* I_-, I_+ *et* I_m *?*

Exercice 5 (méthodes des rectangles) *Programmez une fonction* `procRectangle` *prenant en entrée* f, a, b, n *et retournant au choix* I_-, I_+ *ou* I_m. *Testez vos programmes sur des fonctions de votre choix en comparant aux valeurs exactes fournies par Maple.*

La méthode de Riemann est exacte sur des fonctions constantes (polynômes de degré 0). La méthode du point du milieu est exacte pour des fonctions affines (degré 1).

2.2 Cadre général : méthodes de Newton-Cotes

Comme vous l'aurez compris, il est possible de choisir d'autres figures géométriques que des rectangles pour effectuer l'approximation de l'aire sous la courbe. Les méthodes dites de Newton-Cotes approchent donc une intégrale en partitionnant l'intervalle de départ, en interpolant f sur chaque sous-intervalle de manière à calculer facilement une approximation de l'intégrale puis en sommant tous ces résultats. Il y a deux paramètres dans ces méthodes : le degré du polynôme interpolateur et le nombre de subdivisions de $[a, b]$.

- Méthode des rectangles : interpolation par fonction constante (degré 0), rectangles, exacte pour degré 0.
- Méthode des trapèzes : interpolation par fonction affine (degré 1), trapèzes, exacte pour degré ≤ 1.
- Méthode de Simpson : interpolation par parabole **(degré 2)**, exacte pour **degré** ≤ 3. Cette méthode est très utilisée pour son bon rapport coût-précision.
- ...

Remarque : Pour des questions de stabilité numérique[1]*, il est préferable de limiter le degré du polynôme d'interpolation et de compenser en augmentant le nombre de subdivisions.*

2.3 Méthode des trapèzes

La méthode est la même que pour les rectangles, sauf que sur chaque sous-intervalle on considère l'aire du trapèze défini par les sommets $(a_k, 0)(a_{k+1}, 0)(a_{k+1}, f(a_{k+1}))(a_k, f(a_k))$.

Exercice 6 (méthode des trapèzes) *Programmez une fonction* `procTrapeze` *prenant en entrée* f, a, b, n *et retournant la valeur approchée de l'intégrale de* f *prise entre* a *et* b *obtenue selon la méthode des trapèzes. Comparez à la valeur exacte et à la méthode des rectangles.*

[1] Voir le prochain TP sur l'interpolation.

2.4 Méthode de Simpson

La seconde méthode revient à déterminer la parabole passant par les trois points $(a_k, f(a_k)), (a_{k+1}, f(a_{k+1})), (a_m, f(a_m))$ avec $a_m = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$, puis à calculer l'aire sous la figure ainsi réalisée.

Soit un intervalle quelconque $[c, d]$ et m le milieu du segment. Alors l'aire sous la parabole passant par c, d, m vaut

$$I = \frac{d - c}{6} \times (f(c) + 4f(m) + f(d))$$

Exercice 7 *Pouvez-vous justifier la formule ci-dessus ? Rappelez-vous que nous interpolons f par une fonction h de degré 2, qui doit passer par 3 points, et que nous cherchons une intégrale de h.*

Exercice 8 (méthode de Simpson) *Vous implémenterez un programme `procSimp` reprenant ce principe de calcul. Comparez à la valeur exacte et aux méthodes des rectangles et des trapèzes.*