Les polynômes sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, pour lesquelles les formules de dérivation et d'intégration s'écrivent facilement. Ce sont des objets simples qui se prêtent bien au calcul numérique - approximation des racines, etc. Remplacer une fonction par un polynôme qui s'en approche est donc souvent très utile.

*De manière générale, on appelle **interpolation** le fait de remplacer une fonction par une autre qui coïncide avec la première en plusieurs points.*

1 Introduction : développements limités

Le ***développement limité*** d'une fonction fournit un premier exemple d'interpolation. Néanmoins, il est très important de garder en tête que le développement limité ne peut approcher la courbe que localement. De plus il ne coïncide *a priori* avec f qu'au voisinage du point où l'on effectue le développement limité.

La fonction `taylor` doit vraiment être maîtrisée. Un de ses défauts majeurs est qu'il faut faire bien attention à avoir suffisamment de termes dans le DL, et surtout bien faire la différence entre les deux notation de Landau : $o()$ pour "négligeable devant" (ce que l'on souhaite obtenir quand on demande un DL en mathématiques) et $O()$ pour "majorée par" (ce que la fonction `taylor` de Maple nous renvoie). Il ne faut donc pas hésiter à pousser le développement plus haut que le degré demandé. D'autre part, il faut bien avoir en tête le résultat de Taylor-Young, i.e. que le premier terme du développement est la limite de la fonction au point considéré et que le $n^{\text{ème}}$ est de la forme $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n$.

Exercice 1 *Donnez les DL et les limites à l'ordre et au point demandé :*
- $x \to \exp(x)$ *(à l'ordre 4 en 0)*
- $x \to \sqrt{(1+x)}$ *(à l'ordre 5 en 0)*

Exercice 2
1. *Donnez le développement limité de $f : x \to \frac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre n pour les ordres suivant : $1, 5, 10$.*
2. *Pour chaque valeur de n, définissez le polynôme associé au DL en utilisant `convert(expr,polynom)`. Tracez sur un même graphe ces polynômes et la fonction f.*
3. *Comparez avec le graphe de f. Interprétez qualitativement ces courbes. Que pensez-vous de l'interpolation d'une fonction par son DL ?*

2 Interpolation polynomiale

2.1 Polynômes de Lagrange

Exercice 3 (Préliminaire) *Déterminez le polynôme du second degré passant par les points $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$ (`solve`,`assign` et `rhs`). Tracez la parabole ainsi obtenue.*

Voici l'énoncé général du théorème justfiant l'interpolation polynômiale.

Théorème 1 *Soient $a_0, \dots, a_n$ distincts et f une fonction telle qu'il soit possible de l'évaluer en ces abscisses. Alors il existe un **unique** polynôme de degré inférieur ou égal à n interpolant f en les $n+1$ points $(a_0, f(a_0)), \dots, (a_n, f(a_n))$.*

Ce polynôme peut par exemple s'obtenir par la **formule de Lagrange**[1]. Pour $i \leq n$, posons

$$L_i(X) = \prod_{j\neq i, j=0}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

L_i est appelé le ***i-ème polynôme de Lagrange*** de f aux abscisses $a_0, \dots, a_n$. On chosit comme polynôme interpolateur le polynôme défini par

$$L(X) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\cdot L_i(X)$$

Exercice 4 *Quel est le degré du polynôme $L_i(X)$? Quelle est sa valeur en a_i ? Quelle est sa valeur en a_j, $j \neq i$? Vérifier alors que le polynôme $L(X)$ est de degré inférieur ou égal à n et interpole f en les $n+1$ abscisses $a_0, \dots, a_n$.* C'est donc bien le polynôme évoqué dans le théorème ! ! *On vient de montrer l'existence du polynôme interpolateur. Sauriez-vous démontrer son unicité ?*

Exercice 5
1. *Écrivez une procédure qui, étant donnés une fonction f et une liste d'abscisses $a_0, \dots, a_n$, donne le polynôme interpolateur associé.*
2. *Afin de vérifier que votre procédure fonctionne correctement, vous pouvez la tester sur une certaine famille de fonctions pour lesquelles vous connaissez déjà le résultat. Laquelle ?*
3. *Appliquer votre procédure à la fonction $\cos$ et aux abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, et affichez sur un même graphique l'interpolation et la fonction $\cos$. En quel point l'écart semble-t-il le plus grand - une réponse qualitative est attendue ? Affinez l'interpolation en ajoutant ce point. Que pensez-vous du résultat ?*

2.2 Phénomène de Runge, abscisses de Tchebichev

Dans cette partie nous allons illustrer un des problèmes de l'interpolation de Lagrange avec le ***phénomène de Runge***. Nous considérons à présent la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+8x^2}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 6 *Définissez une procédure `x_unif` qui étant donnés deux réels $a < b$ et un entier N, renvoie la liste des $N+1$ abscisses uniforméments réparties entre a et b. Appliquez la procédure de l'exercice 5 à la fonction f et à `x_unif`$(-1, 1, N)$ pour $N = 2, 10, 20, 100$. Que constatez-vous ?*

Le choix des abscisses donne un résultat insatisfaisant. Plus on augmente l'ordre du polynôme (donc le coût de calcul), plus la précision baisse ! ! Cette situation n'est évidement pas satisfaisante du tout. Nous allons voir qu'il est possible de corriger cela en partie en n'utilisant pas des abscisses uniformément réparties mais les ***abscisses de Tchebichev***. Cependant la seule manière de réellement réduire ce phénomène est d'utiliser des interpolations plus avancées (par exemple splines cubiques).

Exercice 7 *Définissez une procédure `x_Tch` prenant en entrée deux réels $a < b$ et un entier N, et qui renvoie la liste des $N+1$ abscisses de Tchebichev $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos(\frac{i}{N})$. Appliquez à nouveau la procédure de l'exercice 5 à la fonction f et à `x_Tch`$(-1, 1, N)$ pour $N = 2, 10, 20, 100$. Que constatez-vous ?*

[1] Il existe aussi une formule de Newton, mais elle donne exactement le même polynôme, cf. théorème.

3 Ouverture : splines cubiques

Cette partie ne concerne que ceux qui ont réussi à programmer tous les algorithmes de la première partie.

Les abscisses de Tchebichev ne résolvent pas tous les problèmes. On peut donc penser à interpoler par des fonctions plus compliquées que des polynômes[2]. On va ici utiliser une idée déjà utiliser pour les intégrales : on va diviser l'intervalle $[a, b]$ en subdivisions, interpoler polynômialement sur chaque subdivision puis recoller les morceaux. Ceci permet d'utiliser des polynômes de degrés faibles, et donc limite le phénomène de Runge. De plus on peut toujours utiliser les abscisses de Tchebichev pour améliorer encore la méthode. Ce procédé utilisé en CAO, permet de créer des courbes passant par des points donnés et qui sont relativement lisses à l'oeil nu.

A la différence de l'interpolation de Lagrange ou l'on utilisait un polynôme défini globalement, dans le cas des splines cubiques, on utilise plusieurs polynômes que l'on recolle. Étant donné une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ et des abscisses $a_0, \dots, a_n$ distinctes deux à deux de cet intervalle, tels que $a_0 = a$ et $a_n = b$, notre but est de construire une fonction g qui interpole f aux abscisses a_i telle que :

(i) Pour tout i compris entre 0 et n, $g(a_i) = f(a_i)$.

(ii) Pour tout i compris entre 0 et $n - 1$, $g_{|[a_i,a_{i+1}]}$, la restriction de g à $[a_i, a_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Notons $P_i = g_{|[a_i,a_{i+1}]}$.

(iii) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

Exercice 8 *Pour i compris entre 0 et $n-1$, on écrit $P_i = a_iX^3 + b_iX^2 + c_iX + d_i$. Les inconnues du problèmes sont donc les a_i, b_i, c_i et d_i, soit au total $4n$ inconnues. En utilisant les conditions (i),(ii),et (iii), trouver les équations que doivent vérifier les P_i. Combien d'équations obtient-on ? Pour pallier ce problème on rajoute deux conditions : $P_0^{(2)}(0) = P_{n-1}^{(2)}(0) = 0$.*

Exercice 9 *Soit f une fonction passant par les points $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$ et $(3, 0)$. Pour cette fonction f, tracez sur un même graphe le polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 3 de f et la spline cubique de f définie dans l'exercice précédent.*

Exercice 10 *Définissez une procédure `spline` qui prend en argument une liste de couples d'éléments, par exemple :*

```
[> A:=spline([[0,0],[1,4],[2,-2],[3,0]]);
```

Cette procédure renverra les différents polynômes mis en jeu dans le calcul de la spline cubique et tracera la spline. Testez votre procédure sur des exemples.

4 Culture

L'interpolation est un sujet très vaste, et les techniques employées se retrouvent dans d'autres problèmes de calcul scientifique. Par exemple, pour le calcul intégral et la méthode de Simpson, on interpole par une parabole sur chaque sous-intervalle (ça ne vous rappelle rien ?).

Voici une liste de problèmes classiques reliés à l'interpolation polynômiale.

Polynômes de Hermite : on cherche toujours à interpoler f par un polynôme P, mais cette fois si on veut qu'en chaque abscisse non seulement $f(a_i) = P(a_i)$, mais aussi $f'(a_i) = P'(a_i)$. Les polynômes de Hermite sont alors l'analogue des polynômes de Lagrange. Cette méthode réduit considérablement le phénomène de Runge, mais elle coûte cher en calculs, et en pratique il faut connaître la valeur de la dérivée du phénomène à étudier.

[2]Mais pas trop compliquées, sinon on ne saura pas les manipuler.

Interpolation par fonctions rationnelles : on cherche cette fois à interpoler par des *fractions rationnelles*, c'est à dire des expressions du type P/Q, avec P, Q des polynômes. C'est plus difficile que l'interpolation polynômiale, mais le résultat est meilleur. Une qualité supérieure est encore atteinte avec les *fonctions rationnelles par morceaux* (*NURBS* en anglais), mais ces objets sont difficiles à manipuler.

Interpolation trigonométrique : pour interpoler des fonctions périodiques, on peut préférer utiliser des combinaisons linéaires de fonctions du type $x \to e^{inx}$, $n \in \mathbb{N}$. Une autre possibilité est d'utiliser des *séries de Fourier*. Dans ce cas l'analogue du phénomène de Runge s'appelle le *phénomène de Gibbs*.

Régression : le problème de la régression est voisin de celui de l'interpolation. On se donne n points (x_i, y_i) et on veut calculer une fonction h qui passe *au mieux* par ces points. C'est à dire qu'on n'impose plus de passer exactement par les points, mais plutôt de diminuer l'erreur moyenne due à l'approximation. Si on cherche h sous forme de droite, on parle alors de *régression linéaire*. Une méthode classique est la *méthode des moindres carrés*.
La régression prend tout son sens quand les (x_i, y_i) sont des données du monde physique avec une certaine incertitude sur les valeurs prises, due aux erreurs de mesure.